

Projektarbeit im Projektkurs
Marie-Curie-Gymnasium
Billy-Montigny-Platz 5
59199 Bönen

Der Thermodynamische Kreisprozess anhand des Stirlingmotors

Elias Harb, Robin Kappes,
Physik-Projektkurs,
bei Herrn Dr. Günther,
Jahrgangsstufe Q1,
Schuljahr 2019/2020,
Bönen, den 15.06.2020

Vorwort

Wir würden an dieser Stelle einmal unseren Dank an Herrn Dr. Thomas Günther aussprechen, der uns wunderbar in der Physik und der Mathematik durch seinen Unterricht unterstützt hat und uns somit den nötigen Hintergrund vermitteln konnte. Außerdem sind wir dankbar für die Beratungen bei Fragen.

Aufgrund einer schwerwiegenden Pandemie muss man vorhersagen, dass diese Arbeit zwar nicht qualitativ aber dennoch quantitativ darunter gelitten hat, denn wichtiger Unterricht ist für uns entfallen und wir mussten mit unseren aufgezeichneten Daten so gut Arbeit wie es nur geht. Leider konnten wir so nicht alles aufgreifen was wir auch wollten, was ziemlich schade ist. Aber eine ausführliche Erklärung folgt im Fazit. Dennoch sind wir mit den Ergebnissen sehr zufrieden und überraschenderweise hat uns die Arbeit Spaß gemacht.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	2
2 Theoretischer Hauptteil:	3
2.1 die Grundlagen der Thermodynamik	3
2.2 die Funktionsweise des Stirlingmotors.....	7
3 Praktischer Hauptteil: Versuch am Stirlingmotor.....	11
3.1 Versuchsprotokoll zum Stirlingmotor & Berechnung der Arbeit mit Testwerten.....	11
3.2 Ansatz zur Berechnung des Flächeninhaltes	13
3.3 Mögliche Fehlerintervalle bei der Berechnung der Fläche des Stirlingmotors	17
4 Berechnung der Leistung des Motors	19
5 Fazit	20
Literaturverzeichnis	21
Anhang	22
Abbildungsverzeichnis.....	24
Selbstständigkeitserklärung	25

Einleitung

Die Thermodynamik ist eines der wichtigsten Phänomene der Physik und gerade der Menschheit, denn durch sie hat es erstmals Massenproduktionen in der Industrialisierung gegeben. Durch diese Wärmelehre war es möglich einige Maschinen zu verrichten, die Wärme in mechanische Arbeit bzw. Elektrizität umwandeln können und somit den Arbeitern eine Last abnehmen und man viele Produkte produzieren kann.

Eine hinreichende Entwicklung ist der Stirlingmotor, welcher von Robert Stirling 1816 entwickelt wurde. Dieser wird heutzutage beispielsweise noch bei der Umwandlung von Solarenergie in mechanische Energie benutzt. Somit kann die Thermodynamik durch die Sonne genutzt werden und wird somit zu einer erneuerbaren Energie.

Demnach ist das Thema aktuell, denn die Suche nach einer erneuerbaren Energie wird mit dem Klimawandel immer wichtiger für das weitere Leben auf der Erde.

Dass die Wärmelehre aus dem Lernplan, aus zeittechnischen Gründen, gestrichen wurde hat uns ziemlich verärgert, doch durch den Projektkurs konnten wir nun diese Lücke füllen und uns dem Thema widmen. Besonders hat uns daran gereizt, dass man relativ einfach die Wärmeenergie in Arbeit umwandeln kann. Die einzelnen Hauptsätze der Thermodynamik haben wir auch immer interessant gefunden, denn es wurde schon oftmals im Unterricht angeschnitten, aber nie richtig thematisiert.

An unserer Schule haben wir einen Stirling-motor von Leybold an welchen wir einige Experimente durchführen, diese analysieren und deuten werden und uns an einer Formel versuchen, den Flächeninhalt des, durch das Experiment entstehende, PV-Diagramm zu berechnen. Zur Annäherung der verrichteten Arbeit, also des Flächeninhalts, versuchen wir zunächst durch zwei Graphen eine ungefähre Darstellung der tatsächlichen Arbeit zu verrichten. Hinzukommt, falls es zeitlich möglich ist, eine mögliche Annäherung an eine Ellipse, da diese teilweise gut ins Schema passt.

Die Aufzeichnung mit unserer Annäherung sieht so aus:

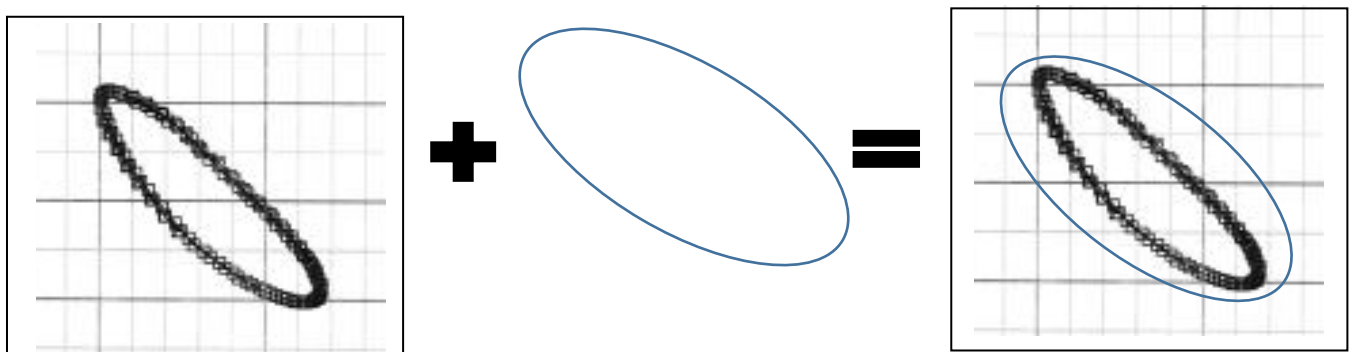


Abb. 0.1 Unser Versuch die tatsächliche Arbeit in eine Ellipse zu transformieren

Die Grundlagen der Thermodynamik

Damit wir uns mit dem Stirlingmotor und seiner Funktionsweise beschäftigen und diese auch genau verstehen können müssen wir uns erstmal mit dem Kernthema befassen, welches die Thermodynamik ist. Ein essentieller Bestandteil der Thermodynamik ist der Umgang mit der Energie und Temperatur in einem System mit seiner Umgebung. Dabei erfolgt dann auch eine Zustandsänderung die ebenfalls zu beachten ist. Der Umgang mit der Temperatur und Energie unterscheidet somit die Thermodynamik von der Mechanik¹.

Für die Energie an sich gilt erstmal:

$$\text{„Energie} = \text{Exergie} + \text{Anergie“}^2$$

Somit setzt sich dann die Energie aus zwei Bestandteilen zusammen. Zu einem die Exergie, welche die Nutzenergie ist womit man Arbeit verrichten kann und die Anergie, welche eine nicht mehr umwandelbare Energie ist.³ Dies ist die Grundlage für den ersten Hauptsatz der Thermodynamik, welchen wir noch im laufenden genauer erläutern werden.

Doch bevor wir uns mit den genauen Eigenschaften beschäftigen müssen nochmal Systeme und deren Umgebung erläutert werden. Dort unterscheidet man drei Arten von thermodynamischen Systemen.

Das abgeschlossene System

„Unter einem abgeschlossenen System versteht man ein System, dass mit seiner Umgebung weder Masse (m), noch Wärme (Q) oder Arbeit (W) austauscht“ (Weigand, Köhler & Von Wolfersdorf S.3) Abb. 1.1. Solch ein System ist in der Realität nicht umsetzbar, denn es müsste wärmedicht sein und somit auch eine unendlich gute isoliert sein nach Weigand, Köhler & Von Wolfersdorf S.3. Dennoch gibt es Gegenstände die eine Näherung zu dem System darstellen wie z.B. eine Thermoskanne⁴.

Das Geschlossene System

Bei einem geschlossenen System sieht das anders aus, denn dort kann dann Energie in Form von Wärme oder der Arbeit ein- oder austreten, dennoch kann es die Masse nicht (vgl. Weigand, Köhler & Von Wolfersdorf S.3). „Betrachtet man ein Gas, das sich in einem durch einen Kolben verschlossenen Zylinder befindet [Abb. 1.1], so ist dies ein Beispiel für ein geschlossenes System“ (Weigand, Köhler & Von Wolfersdorf S.4). Ein Beispiel dafür, welches noch in der fortlaufenden Arbeit vorkommt, ist der Stirlingmotor bzw. der Heizzylinder. Dort ist auch ein Gasgemisch im Heizzylinder, welcher durch einen Verdrängungskolben und einem Arbeitskolben abgeschlossen ist. Führt man nun Wärme zu und gibt dem Schwungrad einen Anschwung, dann bewegt sich der Kolben wobei Arbeit verrichtet wird.

¹ Vgl. Weigand, Köhler & Von Wolfersdorf S.3

² Windisch, S.79

³ Vgl. Windisch 2008, S. 79 & S.162

⁴ Vgl. Weigand, Köhler & Von Wolfersdorf S.3

Das offene System

Die letzte Variante der Systeme kann nun Masse, Wärme und auch die Arbeit, die letzten Beiden sind Beispiele für Energien, über das eingegrenzte System abgeben oder aufnehmen.¹ Ein Beispiel dafür wäre eine Gasflasche, welche über ihr Ventil gerade Gasteilchen austreten (nach Weigand, Köhler & Von Wolfersdorf S.4) siehe Abb. 1.1.

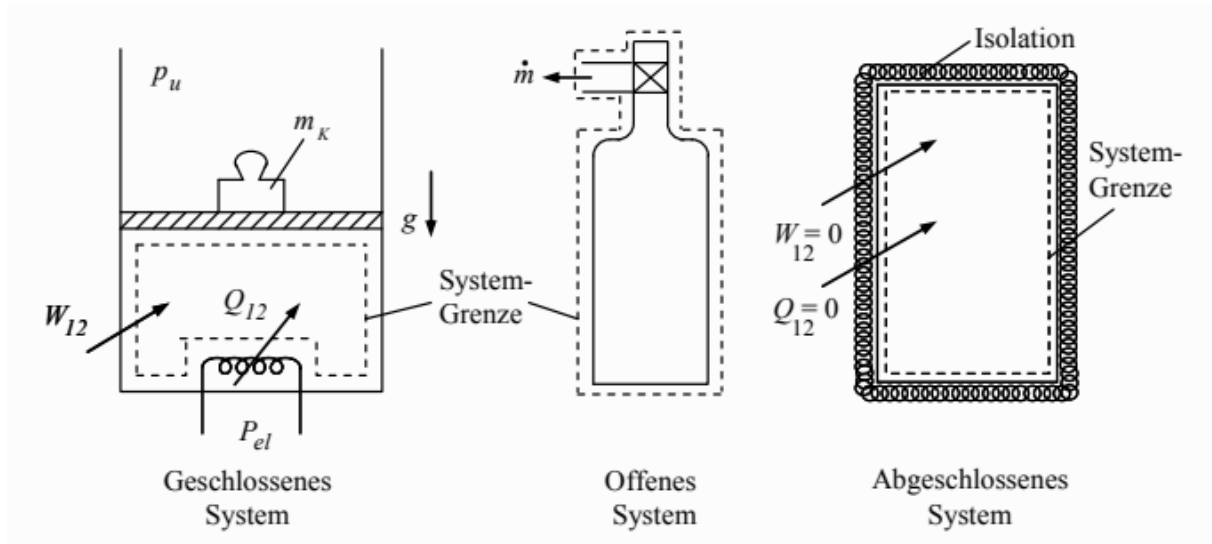


Abb. 1.1: Systeme der Thermodynamik.

Quelle: Weigand, Köhler & Von Wolfersdorf S.4

Nachdem wir uns nun mit einer kurzen Erklärung der Grundlagen beschäftigt haben können wir uns nun den ersten Hauptsatz der Thermodynamik widmen. Später werden dann noch die Anwendungen folgen.

Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik ist: die Energie ist konstant. Sie kann niemals aus Nichts entstehen und nicht vernichtet werden.²

Demnach kann man dann folgern, dass keine Energie in dem System aufgenommen oder abgegeben werden kann. Mathematisch gesehen können dann auch Energien addiert oder subtrahiert werden (nach Windisch S.32).

Sei δQ die Wärme in einem abgeschlossen System, δW die verrichtete Arbeit die durch das System und U die innere Energie des Systems, dann ändert letzteres sich um das vollständige Differential (nach Blatter, S.17)

$$dU = \delta Q - \delta W \quad (1.1)$$

Somit wäre auch „ dU [...] unabhängig vom Weg der Zustandsänderung und es gilt“ (Blatter, S.17)

$$\oint dU = 0 \quad (1.2)$$

¹ Vgl. Weigand, Köhler & Von Wolfersdorf S.4

² Windisch, S.32

³ Blatter, S.17

⁴ Blatter, S.17

„für jeden Kreisprozess. Auf die Masseneinheit eine[r] homogene[r] [Flüssigkeit] bezogen, können wir mit spezifischen Grö[ß]en u , q und v schreiben,“¹

$$du = \delta q - p dv. \quad (1.3)$$

Bevor wir uns sofort mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik beschäftigen müssen wir uns mit den Prozessen und insbesondere mit dem Kreisprozess befassen.

Kreisprozesse

„Für die kontinuierliche Umwandlung einer Energieform in eine andere mit Hilfe von Gasen als Arbeitsmedium sind so genannte Kreisprozesse nötig.“² Dies wird für uns besonders wichtig, denn der Stirlingmotor nutzt genau dieses Medium.

Kreisprozesse sind, nach Windisch S. 157-158, grundsätzlich nur möglich, wenn die folgenden drei Bedingungen

1. Wärme ab- und zugefügt wird in einem System,
2. Man wieder zu dem Anfangszustand gelangt,
3. Mindestens drei Zustandsänderungen durchgeführt werden.

Wenn man dies jetzt auch mit dem ersten Hauptsatz in Verbindung bringt, dann ist es auch nur höchstens möglich so viel Arbeit zu bekommen wie man auch aufgewendet hat.

Außerdem ist 3. eine Bedingung um keinen Arbeitsverlust zu erleiden, also man nicht mehr Energie anwendet als man gewinnt Abb.1.2.

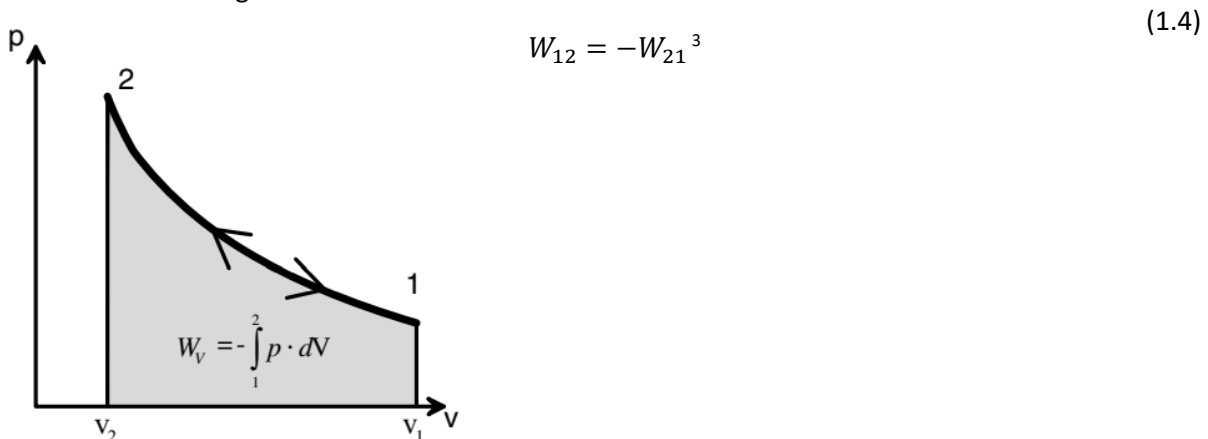


Abb.1.2: Arbeit entlang ein und derselben Zustandsänderung
Quelle: Windisch S.158

„Erfolgt jedoch die Zustandsänderung von 1 nach 2 auf einem anderen Weg als von 2 nach 1, so erhält man einen Arbeitsgewinn ΔW “ (Windisch, S.158).

Hierbei ist: $|W_{21}| > |W_{12}|$ ⁴

¹Blatter, S.17

²Windisch, S.157

³ Windisch, S. 158

⁴ Windisch, S. 158

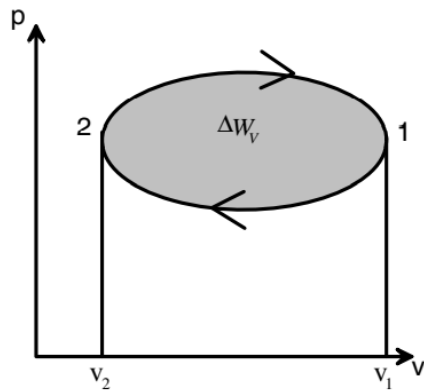


Abb.1.3: Arbeit entlang verschiedene Zustandsänderung

Quelle: Windisch S.158

Der Gewinn der Arbeit beträgt dann auch

$$\Delta W = W_{21} + W_{12}^1$$

Der erste Hauptsatz ist für den zweiten Hauptsatz von hoher Bedeutung, denn durch die Energieerhaltung spielt er eine große Rolle. Die Kreisprozesse sind reversible Prozesse, das heißt sie kehren in ihren Anfangszustand wieder zurück. Das Gegenteil solcher Prozesse sind irreversible Prozesse. Ein einfaches Beispiel für einen reversiblen Prozess wäre eine Feder, die gespannt und wieder entspannt wird. Dadurch lässt sich schon der erste Teil des 2. Hauptsatzes nach Windisch formulieren:

„Alle natürlichen und technischen Prozesse sind irreversibel! Ideale Prozesse sind reversibel gedachte Grenzfälle irreversibler Prozesse!“²

Also zusammengefasst sind die natürlichen und technischen Prozesse nie irreversibel, nur in der Theorie. Das kann man z.B. auch an einer Feder zeigen, da sie nach einer gewissen Zeit ausleiert.

Den zweiten Teil des 2. Hauptsatzes formuliert er wie folgt:

„Wärme fließt von selbst nur vom Körper höherer Temperatur zum Körper niedrigerer Temperatur. Es ist umgekehrt nicht möglich, dass Wärme von einem kälteren Körper von selbst auf einen wärmeren Körper übergeht.“²

Das bedeutet, wenn zwei Körper mit einander interagieren (z.B. Körper A & Körper B) und A davon wärmer ist, dann kann bei der Interaktion mit B, A niemals wärmer werden als er bereits ist sondern höchstens an Wärme verlieren. Wiederum heißt es aber, dass B wärmer werden kann durch die Interaktion mit A. So trivial dieses Beispiel erscheinen mag, begegnet es uns täglich im Alltag wie z.B. bei einem warmen Erfrischungsgetränk, dem Tee.

Dieser ist warm und bei der Zufuhr von gekühlter Milch, kann der Tee nicht wärmer werden, aber die Milch schon. Diese Anwendung ist zwar nicht auf Körper basierend sollte aber einen groben Einblick in die Alltäglichkeit der Thermodynamik geben.

¹ Windisch, S. 158

²Windisch, S.76

Die Funktionsweise des Stirlingmotors

Nachdem wir uns mit den Grundlagen der Thermodynamik beschäftigt haben kommen wir nun zu der konkreten Anwendung dieser Thematik anhand eines bestimmten Geräts, der Stirlingmotor.

Diese Dampfmaschine wurde 1816 von dem schottischen Pastor Robert Stirling patentiert und nach ihm benannt.¹ Das erstaunliche daran war, dass dieser Motor mit einem abgeschlossenen Arbeitsgas arbeitete und nicht mit (Wasser-)Dampf wie übliche Dampfmaschinen zu dieser Zeit.² Doch wie genau dieser Motor funktioniert erklären wir nun.

Der Aufbau:

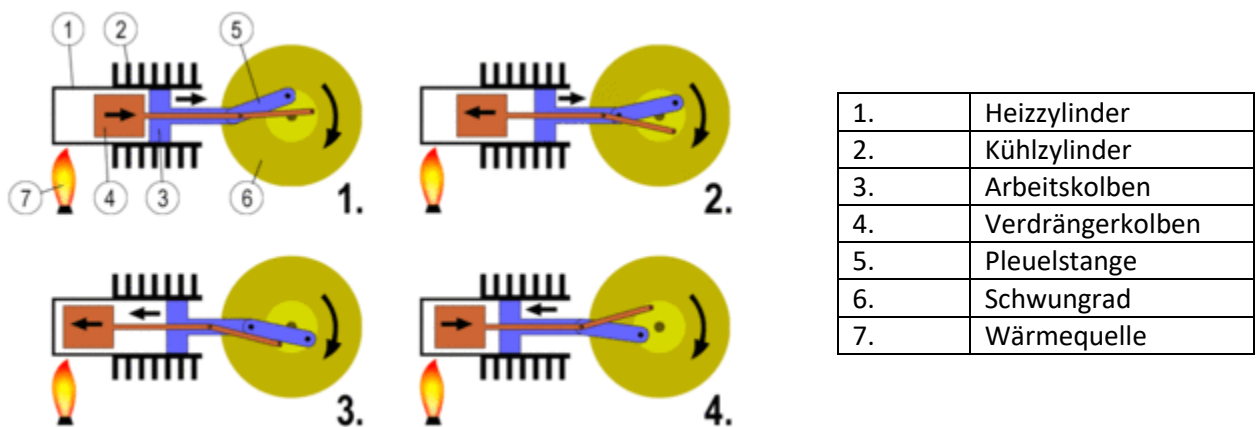


Abb. 2.1: Aufbauskinne

Quelle: (original) energiesparen-im-haushalt.de/energie/bauen-und-modernisieren/hausbau-regenerative-energie/energiebewusst-bauen-wohnen/selbst-strom-erzeugen/blockheizkraftwerk-privat/blockheizkraftwerk-funktion/blockheizkraftwerk-stirlingmotor.html

Der Stirlingmotor (**Abb. 2.1**) besteht aus zwei Zylindern, einmal der Heizzylinder, in dem das Arbeitsgas erhitzt wird und einem Kühlzylinder. Der Heizzylinder kann aus jedem nicht leicht erhitzbaren Material bestehen. Bei unserem Stirlingmotor (**Abb. 2.2.**) ist dies aus einem robusten Glas. Der Kühlzylinder hat in (**Abb. 2.1**) Kühlrippen um die Wärme besser zu verteilen und letztlich abzukühlen. Das Arbeitsgas ist entweder ein Gasgemisch welches leicht zu erhitzen ist oder Erdluft. Desweiterem gibt es einen Arbeits- und Verdrängerkolben, welche innerhalb der Zylinder eingebaut wurden. Zudem muss man noch erwähnen, dass der Arbeitskolben den Kühl- bzw. Heizzylinder beschließt und somit auch nicht das Gas entweichen kann. Diese beiden, der Arbeitskolben über die Pleuelstange, sind mit dem Schwungrad verbunden. Die Kolben hat man bewusst voneinander getrennt, also man benutzt zwei Kolben anstatt einem, weil sie hinterher in den Prozessen gegeneinander arbeiten und das Schwungrad besser bewegen. Abschließend gibt es noch eine Wärmequelle, welche üblicher Weise eine Flamme darstellt.

¹Vgl. Windisch S.202

²Vgl. Physik-Fu Berlin S.2

Unser Stirlingmotor an der Schule sieht so aus:

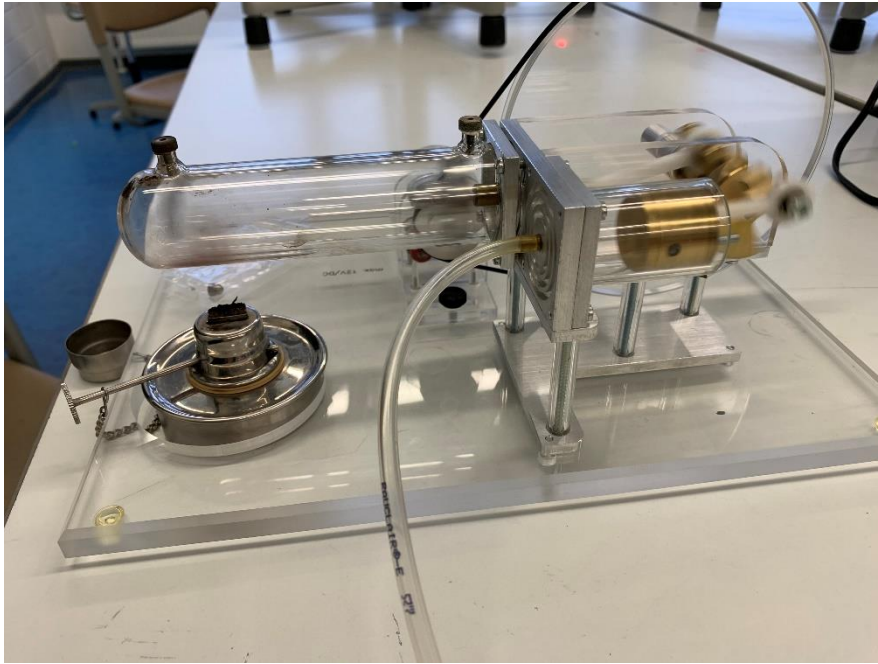


Abb. 2.2.: Stirlingmotor des MCGs

Neben dem eigentlichen Aufbau gibt es ebenfalls noch 4 Zustände die wir in **Abb. 2.1** berücksichtigt haben.

Die Funktionsweise:

Wie vorhin schon angedeutet, gibt es bei dem Stirlingmotor 4 Zustände. Dies nennt man auch den Stirling-Prozess. Demnach ist „Der Stirling-Prozess ist ein motorischer Vergleichsprozess mit äußerer Wärmezufuhr und innerem regenerativen Wärmeaustausch“.¹ Was bedeutet, dass der Stirlingmotor von außen Wärme zugefügt wird und auch innerhalb, diese Wärme dann abkühlen lässt und anzeigt welche optimale Arbeit verrichtet werden kann, wenn der Idealfall eintritt, also keinerlei Verschleiß zum Beispiel.

Der Prozessablauf in 4 Zuständen und Phasen unterteilt, wobei „(1 → 2 und 3 → 4)“² (**Abb. 2.3**) isotherm und „(2 → 3 und 4 → 1)“³ isochor sind. Isotherm bedeutet, dass die Temperatur konstant bleibt und isochor, dass das Volumen konstant ist.

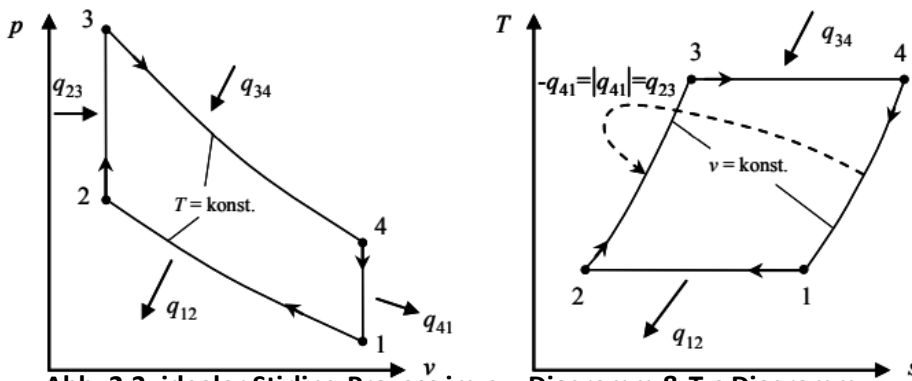


Abb. 2.3: idealer Stirling-Prozess im p-v Diagramm & T-s Diagramm

Quelle: Weigand, Köhler & Von Wolfersdorf S.125

¹Weigand, Köhler & Von Wolfersdorf S.125

^{2;3} Weigand, Köhler & Von Wolfersdorf S.125

Zunächst einmal die Gasgleichung mit der Umformung nach p

$$\begin{aligned} pV &= NkT & |:V \\ p(V) &= \frac{NkT}{V} \end{aligned} \quad (2.1)$$

1 → 2 isotherme Kompression:¹

Die Phase beschreibt, dass Wärme der Quelle an den Heizzylinder abgegeben wird. Da diese Phase nun Isotherm bleiben soll, muss die Wärme über den Kühlzylinder abgegeben werden.² Somit verändert sich das Volumen des Heizzylinders sowie die Entropie des Systems. Hierbei arbeiten die beiden Zylinder (**Abb. 2.1**) zusammen, in dem der Verdrängerkolben sich in den Kühlzylinder bewegt. Aufgrund des Drucks bewegt der Arbeitskolben sich mit.

Da V hier konstant ist, ist eine Darstellung mit der Funktion $p(V)$ nicht möglich.

2 → 3 isochore Wärmezufuhr:³

Hier bleibt nun das Volumen gleich und die Temperatur steigt an. Letztlich erhöht sich ebenfalls der Druck in dem Zylinder. Jetzt arbeiten die Beiden Kolben quasi gegeneinander (**Abb. 2.1**). Der erhöhte Druck veranlasst also den Arbeitskolben sich weiter zum Schwungrad zu bewegen währenddessen der Verdrängerkolben aufgrund der verminderten Temperatur zurückbewegt.

$$p(V) = \frac{NkT_{\text{warm}}}{V} \quad (2.2)$$

3 → 4 isotherme Expansion:⁴

Da nun die Temperatur wieder konstant bleibt und das Volumen zunimmt, fällt der Druck des Systems und die Entropie steigt wieder. Demnach bewegt sich der Arbeitskolben wieder in Richtung des Kühlzylinders.

Da V hier ebenfalls konstant ist, ist eine Darstellung mit der Funktion $p(V)$ nicht möglich.

4 → 1 isochore Wärmeabfuhr:⁵

In der letzten Phase tritt der Stirlingmotor wieder in seinen Anfangszustand zurück. Hierbei wird nun die Wärme abgekühlt und somit fällt der Druck. Das Volumen bleibt dabei konstant.

$$p(V) = \frac{NkT_{\text{kalt}}}{V} \quad (2.3)$$

¹Windisch S.192

² Weigand, Köhler & Von Wolfersdorf S.125

³Windisch S.192

⁴Windisch S.192

⁵Windisch S.192

Im Idealfall ist dieser regenerative Wärmeaustausch durch die Gleichheit der Beträge der spezifischen Wärmen, d.h. $q_{23} = -q_{41} = |q_{41}|$ gekennzeichnet¹.

Da $v_1 = v_4$ und $v_2 = v_3$ ist ergibt sich für das ideale Gas

$$\eta_{th} = 1 - \frac{|q_{12}|}{q_{34}} = 1 - \frac{RT_1 \ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right)}{RT_3 \ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right)} = 1 - \frac{T_1}{T_3} \quad (2.4)$$

Die Berechnung der Arbeit des Stirling Prozess (**Abb. 2.3**) erfolgt durch

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_{32}}^{V_{14}} \left(\frac{NkT_{warm}}{V} - \frac{NkT_{kalt}}{V} \right) dV = Nk(T_{warm} - T_{kalt}) \int_{V_{32}}^{V_{14}} \frac{dV}{V} \\ &= Nk(T_{warm} - T_{kalt}) [\ln V]_{V_{32}}^{V_{14}} = Nk(T_{warm} - T_{kalt}) \ln \frac{V_{14}}{V_{32}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

¹ Weigand, Köhler & Von Wolfersdorf S.125

Versuchsprotokoll zum Stirlingmotor und Berechnung der Arbeit mit Testwerten

Wir haben den Stirlingmotor auf Spannung, Druck und Volumen untersucht, um unter anderem ein pV-Diagramm zu zeichnen und später die Arbeit zu bestimmen.

Material:

- CASSY Lab
- Leybold Sensoren
- Stirlingmotor
- Computer
- Verbindungskabel
- Angelschnur
- Stativ
- Feder

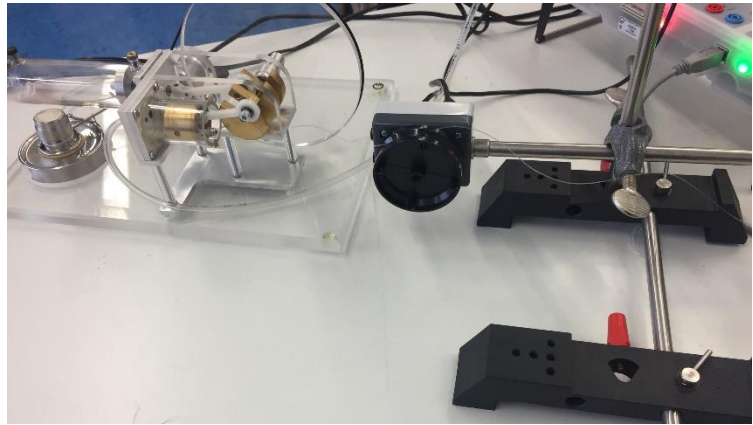


Abb. 3.1 Der Versuchsaufbau mithilfe einer Angelschnur zur Messung

Durchführung:

Beim Stirlingmotor wird eine Spiritusflamme unter dem Verdrängungskolben angebracht und angezündet. Sobald genug Hitze aufgebaut wurde, fängt der Stirlingmotor an zu arbeiten. Mithilfe zweier Outputs kann man den Druck und die Spannung messen. Mit den Verbindungskabel wird eine Verbindung zum CASSY Lab und schließlich zum Computer hergestellt, um dort die Messwerte aufzuzeichnen. Außerdem wird der Druck mithilfe einer Angelschnur, die am Verdrängungskolben und an der Feder befestigt ist, und einen Wegaufnehmer wird das Volumen aufgezeichnet.

Beobachtung:

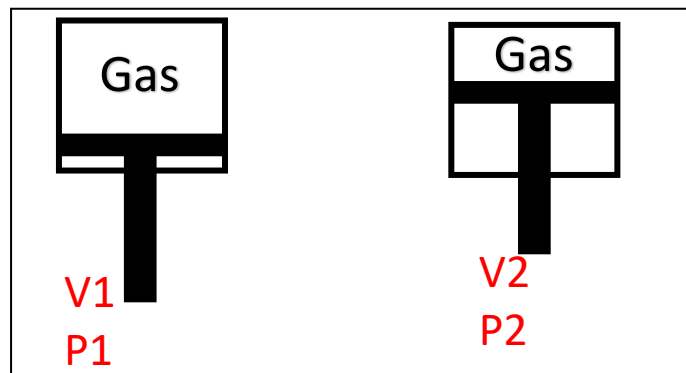
Dabei konnte man folgende Werte beobachten:

- Eine durchschnittliche Spannung von 6 V
- Druckdifferenz von 400 hPa (-200 hPa bis 200 hPa)
- Volumen 100 cm³ bis 167 cm³

Außerdem haben wir noch hypothetische Grundangaben:

- Temperatur einer Spiritusflamme: 526,5 Celsius, 800 Kelvin¹
- Teilchenanzahl der Luft im Kolben: $1,6 \cdot 10^{21}$ mol
- Temperatur des Heizzylinders nach Abgabe der Hitze ca. 176,85°C bzw. ca. 450 Kelvin²

Da die Temperatur konstant ist und das Volumen und der Druck sich ändern, haben wir eine Isotherme Zustandsänderung. Um die Arbeit zu berechnen leiten wir die folgende Formel her, wobei V das Volumen ist, N die Stoffmenge und k die Gaskonstante und W die Arbeit:



^{1 & 2}Angaben von kesselheld.de/stirlingmotor-im-bhkw/

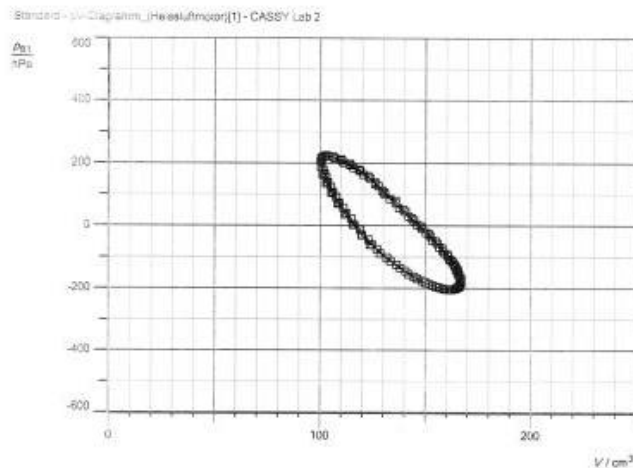


Abb. 3.2 Die verrichtete Arbeit des Stirlingmotors, gezeichnet durch CASSY Lab

Isotherme Herleitung:

$$\int_{w_1}^{w_2} dW = -Nk\Delta T \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV$$

$$w_2 - w_1 = (-Nk\Delta T \ln(V_2)) - (-Nk\Delta T \ln(V_1))$$

$$\Delta w = -Nk\Delta T (\ln(V_2) - \ln(V_1))$$

$$\Delta w = -Nk\Delta T \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$\Delta w = Nk\Delta T \ln\left(\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{-1}\right)$$

$$\Delta w = Nk\Delta T \ln\left(\frac{1}{\frac{V_2}{V_1}}\right)$$

$$\Delta w = Nk\Delta T \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

Durch die gegebenen Werte kann man die Arbeit des Stirlingmotors nun berechnen:

$$W_{theo} = n k \Delta T \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

$$W_{theo} = 2,66 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot (800 \text{ K} - 450 \text{ K}) \cdot \ln\left(\frac{167 \text{ cm}^3}{100 \text{ cm}^3}\right)$$

$$W_{theo} \approx 3,97 \text{ J}$$

Die theoretisch vollrichtete Arbeit beträgt also 3,97 Joule und ist somit im normalen Bereich. In der Realität sieht dies jedoch noch ein wenig anders aus, denn es kommen noch mehrere Faktoren, wie Verschleiß, Wind, usw. hinzu, die den Stirling Prozess negativ beeinflussen. Deswegen werden wir versuchen uns der gezeichnete Grafik des CASSY Programmes, welche die tatsächliche Arbeit zeigt, durch zwei Graphen anzunähern.

Ansatz zur Berechnung des Flächeninhalts

Wie vorher bereits erwähnt, konnten wir für unseren Stirling-Motor ein pV-Diagramm zeichnen lassen. Da wir die theoretische Arbeit bereits berechnet haben (siehe Seite), wollen wir uns nun mit der praktischen Arbeit befassen. Hierzu dient das gezeichnete pV-Diagramm des Computers. Um die Fläche anzunähern, teilen wir das entstandene Gebilde in zwei Funktionen auf, einmal in eine untere und eine obere.

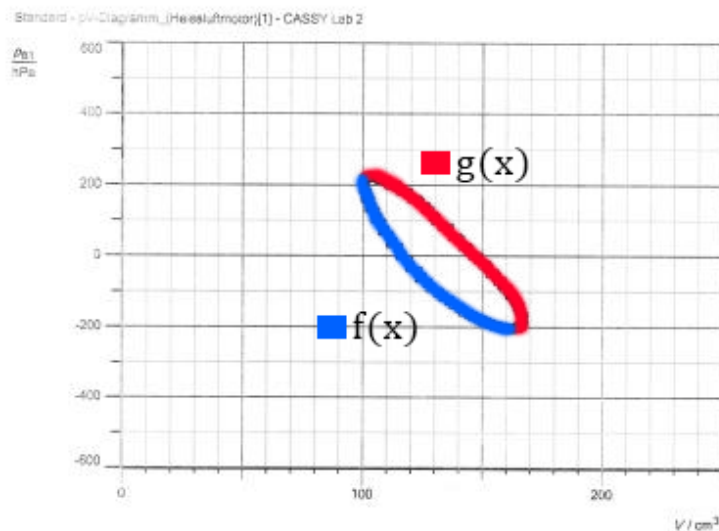


Abb. 4.1 Darstellung der verrichteten Arbeit durch die Graphen $f(x)$ & $g(x)$

Danach stellen wir zwei Funktionsgleichungen auf und integrieren sie. Um die Fläche zwischen den beiden Funktionen zu bekommen wird die untere Funktion von der oberen Funktion subtrahiert. Da die „Banane“ schwierig zu modellieren ist, haben wir eine Transformation durchgeführt (siehe Abbildung 1).

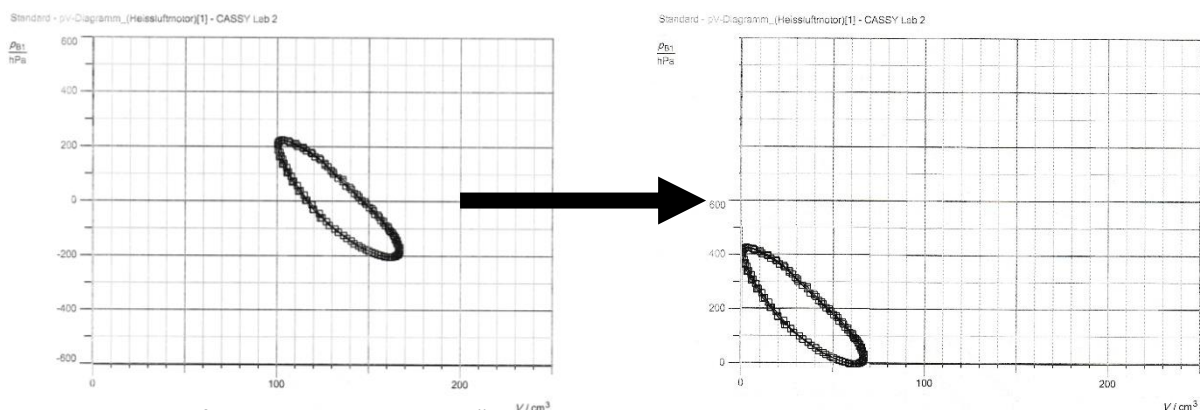


Abb. 4.2 Transformation der „Banane“

Nachdem wir die „Banane“ transformiert haben, haben wir uns zunächst auf die untere Funktion fokussiert. Für die Transformation haben wir das kleinste Volumen als Faktor immer abgezogen von den eigentlichen Volumen, sprich wir haben $100,3 \text{ cm}^3$ als $x = 0$ und den Druck um 204 hPa erhöht als $y + 204$. Also der Punkt $(100,3 | 223) \rightarrow (0 | 423)$

Dazu haben wir uns drei Werte aus der Wertetabelle ausgesucht:

x-Wert	61.1	≈ 0
y-Wert	1	427

Als Ansatz haben wir eine e-Funktion genommen und die fehlenden Werte berechnet.

$$f(x) = a \cdot e^{kx},$$

Demnach können wir den 2. Wert einsetzen, um a zu bekommen

$$427 = a \cdot e^0 = a$$

Dann können wir die beiden Werte einsetzen, um k herauszubekommen

$$1 = 427 \cdot e^{k \cdot 61.1} \quad | \div 427 \quad | \ln()$$

$$\ln\left(\frac{1}{427}\right) = 61.1 k \quad | \div 61.1$$

$$k_1 = -0.0991$$

Dadurch können wir die untere Funktion aufstellen:

$$f(x) = 427 \cdot e^{-0.0991x}$$

Für die obere Funktion haben wir uns überlegt diese als Parabel, also Polynom zweiten Grades, darzustellen und zwar mit den Punkten

x-Wert	61.1	≈ 0	25,7
y-Wert	1	427	337

Die Standardform ist bekanntlich dafür

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

Mit dem eingesetzten Werte erhält man

$$\text{I.} \quad g(0) = 427 = c$$

Demnach kann man c sofort in die beiden anderen Gleichungen einsetzen

$$\text{II.} \quad g(61,1) = 1 = 3733,21a + 61,1b + 427$$

$$\text{III.} \quad g(25,7) = 337 = 660,49a + 25,7b + 427$$

II. kann man nach a umformen und dann in III. einsetzen

$$1 = 3733,21a + 61,1b + 427 \quad | - 427; -61,1b; \div 3733,21$$

$$\frac{-426}{3733,21} - \frac{10b}{611} = a \quad \text{IV.}$$

$$337 = -75,37 - 10,81b + 25,7b + 427$$

Nach einer Zusammenfassung und Umformung nach b

$$337 = 351,63 + 14,89b \quad | - 351,63; \div 14,89$$

Ergibt sich

$$b = -\frac{1463}{1489}$$

Die Variable b kann man nun in **IV.** einsetzen

$$\frac{-426}{3733,21} + \frac{14630}{611 \times 1489} = a$$

und es ergibt sich

$$a = -\frac{908200}{9263593}$$

Die obere Funktion sieht dann so aus

$$g(x) = -\frac{908200}{9263593} x^2 - \frac{1463}{1489} x + 427$$

Wenn wir nun die beiden Funktionen in einem Koordinatensystem zeichnen lassen erhalten wir



Abb. 4.3 Darstellung von $f(x)$ & $g(x)$ (Markiert in den jeweiligen Farben)

Als nächstes berechnen wir die Fläche zwischen den beiden Graphen in dem wir das Integral, mit den Schnittpunkten der Funktionen als Grenzwerte, von der Subtraktion der beiden Funktionen berechnen

$$\begin{aligned} \int_{x_{min}}^{x_{max}} (g(x) - f(x)) dx &= \int_0^{61.1} \left(-\frac{908200}{9263593} x^2 - \frac{1463}{1489} x + 427 - 427 \cdot e^{-0.0991x} \right) dx \\ &= \left[-\frac{908200}{27793779} x^3 - \frac{1463}{2978} x^2 + 427x + 4308,78e^{-0.0991x} \right]_0^{61,1} \\ &12502,76 \approx A \end{aligned}$$

Dennoch sind wir soweit noch nicht fertig, denn diese berechnete Fläche hat noch nicht die Einheit Joule. Von unseren Aufzeichnungen ist bekannt, dass für die X-Werte cm^3 und für die Y-Werte hPa als Einheit benutzt wird.

Zunächst müssen wir das Volumen in m^3 angeben um hinterher mit der Umformung

$$hPa = 100 \frac{N}{m^2}$$

auf Nm bzw. Joule zu kommen. Bekanntlich sind ja

$$1cm^3 = \frac{1}{1000000}m^3$$

Wenn man nun die beiden Wertemultipliziert erhält man

$$\frac{100Nm^3}{1000000m^2}$$

Und letztlich

$$\frac{1}{10000}Nm \text{ bzw. } J$$

Also muss man die Fläche nochmal mit diesem Umrechnungsfaktor multiplizieren und man erhält für die tatsächliche Arbeit

$$W_{real} = 12502,76 * \frac{1}{10000}J \approx 1,25J$$

Die tatsächliche Arbeit W_{real} dividiert durch die theoretische Arbeit $W_{theo} = 3,97$ aus dem Versuchsprotokoll, mit der Subtraktion von 1 (als 100%) ergibt

$$p\% = 1 - \frac{1,25}{3,97} \approx 69\%$$

zwei Drittel der Arbeit gehen somit verloren. Dafür gibt es aber einen Grund. „Es ist klar, dass sich durch die stetige Drehbewegung keine reinen Isochoren [und Isothermen] verwirklichen lassen. [...]“¹

Natürlich liegt es aber auch daran, dass die beiden Graphen $f(x)$ & $g(x)$ nicht alle Werte als Punkte haben und wir auch bei der $f(x)$ Funktion einen Wert geändert haben, denn Nullstellen bei der e -Funktion hätten aus dem Definitionsbereich des Volumens gelegen.

Dennoch würden wir aber sagen, dass uns die Annäherungen und Berechnung der Fläche gut gelungen sind.

¹Windisch S.194

Mögliche Fehlerintervalle bei der Berechnung des Flächeninhalts

In der Physik sind Fehler oder eine Abweichung beim Messen von physikalischen Werten nicht unausweichlich. Daher rechnet man häufig mit Fehlerintervallen. In unserem Beispiel können wir Fehler bei der theoretischen und der praktischen Berechnung des Flächeninhalts mit eingebaut haben. Bei der theoretischen Rechnung haben wir nämlich mit gemessenen Werten gerechnet und auch 2 hypothetischen Werten. Für die Berechnung des Flächeninhalts haben wir folgende Formel:

$$\Delta w = Nk\Delta T \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

Zunächst betrachten wir die Temperaturdifferenz, die wir mit 800 K – 450 K angenommen haben, da die maximale Hitze von 800 K in einem Stirlingmotor üblich ist. Dieser Wert ist nicht ganz genau und man sollte daher ± 100 Kelvin als Fehler rechnen, da wir die Temperatur nicht messen konnten.

Die Gaskonstante k ist eine Konstante und daher wird ohne Fehler gerechnet.

Die Volumen wurden mithilfe des Cassy-LABs gemessen, aber können immer noch Fehler erhalten, da z. B. das Gerät älter oder mit der Zeit nicht mehr ganz genau misst. Daher rechnen wir mit $\pm 5 \text{ cm}^3$ als Fehler, wobei die Werte von ungefähr 100 cm^3 bis 160 cm^3 reichen.

Zuletzt haben wir die Teilchenanzahl der Luftmoleküle. Da wir den genauen Druck und Wert nicht mit unseren verfügbaren Geräten messen/ermitteln können, haben wir einen hypothetischen Wert von $1,6 \cdot 10^{21}$ Teilchen genommen. Da dies schon sehr viele Teilchen sind, ist ein Fehler von $(1,6 \pm 0,05) \cdot 10^{21}$ angemessen, obwohl dies immer noch viele Teilchen sind.

Als Gesamtformel erhalten wir somit:

$$\Delta w = (([1,6 \pm 0,05] \cdot 10^{21}) \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}) \cdot [350 \pm 100] \cdot \ln\left(\frac{[167 \pm 5]}{[100 \pm 5]}\right)$$

Und somit erhalten wir:

$$\Delta w = 4,0 \pm 1,9 \text{ J}$$

Unser berechneter Wert liegt somit auch im Fehlerintervall, nämlich 3.97 J .

Als letztes berechnen wir den Fehler für die praktische Arbeit. Wir haben zwei Funktionen, für die „Banane“ also dem Flächendiagramm, aufgestellt. Demnach können wir einen Fehler für beide Funktionen aufstellen, um somit die Arbeit mit Fehler ausrechnen. Da die Funktionen auf den Messwerten basiert und man die Fehler bei den Messwerten mit einbauen müsste sind die Funktionen nicht genau. Außerdem zeigen die Funktionen nur ungefähr die obere und untere Seite der Banane und beinhalten nicht alle Punkte der Messwerte. Somit kann man den Fehler der beiden Funktionen identisch machen und für den x-Wert, also dem Volumen hatten wir einen Fehler von $\pm 5 \text{ cm}^3$ genommen, den wir hier auch nehmen können. Für den Druck kann man den Fehler von $\pm 5 \text{ hPa}$ auch nehmen, da der X-Wert und Y-Wert ungefähr von der Größeneinheit gleich sind.

Diese Fehler können wir auch in die integrierte Funktion einsetzen, da dies keinen Unterschied macht. Somit erhalten wir eine „Fehler“-Funktionen, wenn wir die $f(x)$ & $g(x)$ von einander abziehen und integrieren, folgende Werte:

$$F(61.1 \pm 5) \approx 16812 \pm 610$$

$$F(0) \approx 4308,78$$

Somit erhalten wir am Ende:

$$\int_0^{61.1} (f(x) - g(x)) dx \approx 12503 \pm 610$$

Nach der Umrechnung mit dem bereits ausgerechneten Umrechnungsfaktor erhalten wir:

$$A \approx 1.25 \pm 0.061 J$$

Mit dem Fehler verändert sich die Arbeit nicht so groß, wie die theoretische Arbeit. Das liegt unter anderem daran, dass wir mehr Fehler in der theoretischen einbauen müssen und wir bei der praktischen Funktion die Funktionen durch die Fehlerbalken der Banane laufen gelassen haben.

Leistung des Motors

Neben der Berechnung der Fläche haben wir uns ebenfalls dazu entschieden nochmal die Leistung des Motors zu berechnen. Dafür haben wir ein Video des Motors aufgenommen und es verlangsamt. Diese Wiedergabe Geschwindigkeit ist nun 5% der normalen Zeit, die in dem Video angezeigt wird.

Das bedeutet also, wenn auf der Videolänge nun 1 Sekunde angezeigt wird und das Video auf 5% verlangsamt wurde, dann muss man diese 3 Sekunde mit den 5% bzw. 0,05 multiplizieren.

Somit wären dann

$$t = 3s \cdot 0,05$$

$$t = 0,15s$$

Bei der Aufnahme dauert dieser reversible Prozess 2,08s mit einer Verlangsamung auf 5%.

Somit hätte man nun

$$t = 2,08s \cdot 0,05$$

$$t = 0,104s$$

Dieses Ergebnis spiegelt sich auch in der Drehzahl der Gebrauchsanweisung wider, in der angegeben ist, dass man 600 Umdrehungen pro Minute hat.

Somit hätte man dann

$$n = \frac{600U}{60s}$$

$$n = 10 \frac{U}{s}$$

Mit dem Dreisatz kann man nun berechnen wie viele Sekunden man für eine Umdrehung braucht

$$10U \text{ für } 1s \quad | : 10$$

$$1U \text{ für } 0,1s$$

$$0,1s \approx t = 0,104s$$

Wenn man nun die verrichtete Arbeit aus dem Versuchsprotokoll wobei wir eine mögliche Arbeit von 3,97 J errechnet haben, können wir mit der Formel für die Leistung

$$P = \frac{W}{t}$$

Nun die Leistung des Stirlingmotors berechnen

$$P = \frac{3,97 J}{0,104s}$$

$$P \approx 38,17 \frac{J}{s} = 38,17 W$$

Man könnte also mit dem Motor eine 30 Watt Glühbirne antreiben.

Fazit

Das Schuljahr ist so gut wie vorbei und jetzt muss noch die Projektarbeit fertiggestellt werden. Dazu schreiben wir gerade dieses Fazit, in dem wir nochmal kurz alles zusammenfassen und unsere Ergebnisse bewerten.

Wir haben sehr viel über die Thermodynamik und insbesondere über den Stirlingmotor gelernt. Wir wissen nun wie er funktioniert, wie man dessen Arbeit & Leistung berechnet und haben sogar eine Annäherung an seine „reale“ Arbeit versucht. Diese ist uns dank der Integralrechnung die wir ebenfalls in diesem Jahr gelernt haben, leicht gefallen. Wir wussten wonach wir gesucht hatten und konnten auch schnell diese Annäherung machen. Vorteilhaft war es auch, dass wir eine Projektarbeit schreiben durften und nicht eine Facharbeit. Somit hatten wir ein wenig mehr Zeit, konnten mehr schreiben als in einer Facharbeit, als Vergleich in einer Facharbeit sind maximal 12 Seite ohne Anhang und Literaturverzeichnis erlaubt, und somit die Qualität der Arbeit aufwerten und nicht nur auf das Nötigste runterbrechen.

Dennoch als wir gerade mitten in der Arbeit waren womit wir von dem Sars-CoV-2 überrascht und mussten unsere Messarbeit und Präsenzunterricht niederlegen. Dadurch fehlten uns mehrere Wochen und Testergebnisse um uns noch einem Teil des Themas zu nähern. Wir wollten noch den Flächeninhalt des Stirlingmotors an eine Ellipse annähern. Das „Tolle“ daran wäre, dass man noch nichts darüber geschrieben hat und wir einen Artikel in einer fachwissenschaftlichen Zeitung oder Journal veröffentlichen hätten können. Natürlich wäre das nichts Großes gewesen, aber dennoch hätten wir dann nochmal unsere Englisch-Kenntnisse unter Beweis stellen können und noch ein bisschen tiefer in die Materie des Physikers eindringen können, denn die Veröffentlichung von einem Werk in einem Journal ist üblich nach einer Ausarbeitung.

Wenn man diesen Kurs noch weiterführen könnte, oder wir trotzdem noch Zeit haben daran zu arbeiten könnte man sich als Ziel setzen, diese Annäherung noch einmal zu versuchen. Ebenfalls könnte man nochmal einen Versuch an dem Stirlingmotor durchführen und mit den Werten nochmal rechnen und letztlich beide Ergebnisse miteinander vergleichen, obwohl wir der Meinung sind, dass dieser eine Versuch auch bereits gelungen ist.

Wir würden dennoch abschließend sagen, dass diese Arbeit gelungen ist, da die Werte alle realistisch sind und in den jeweiligen Fehlerintervallen liegen. Wir haben somit fast alle Ziele, die wir uns am Anfang in der Einleitung gesetzt haben erreicht. In dem Anhang findet man noch ein paar Bilder und ein Video zu dem Stirlingmotor, welche wir zur Anschauung benutzt haben.

Literatur Verzeichnis

- Nellis, Gregory; Klein Sanford: *Heat Transfer*. Gregory Nellis and Sanford Klein. Cambridge 2009.
- Incropera, Frank P.; DeWitt, David P.; Bergman, Theodore L.; Lavine, Adrienne S.: *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Wiley 2006.
- Herbert Windisch: *Thermodynamik Ein Lehrbuch für Ingenieure*. 3. Auflage. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. München 2008.
- Blatter, G: *Thermodynamik*. G. Blatter 2009
- Weigand, Bernhard; Köhler, Jürgen; Von Wolfersdorf, Jens: „*Thermodynamik KOMPAKT*“. Springer 2008.
- CS, Vineeth: *STRILING ENGINES: A BEGINNERS GUIDE*. Vineeth CS 2011.
- Abbot, Michael M.; Ness, Hendrik C.: *Thermodynamik Theorie und Anwendung*. van McGraw-Hill Book Company 1976.
- Kluge, Gerhard; Neugebauer, Gerot; *Grundlagen der Thermodynamik*. Deutscher Verlag d. Wissenschaften, Berlin 1976.
- Kittel, Charles; Kroemer, Herbert: *Thermal Physics*. BEDFORD ST MARTINS 1980.
- FU Physik-Berlin: *Der Stirlingmotor – ein Motor, der mit Luft läuft?* 2018

Link zu einigen E-Books: https://drive.google.com/drive/folders/1xudtg_SANDoI5GNHtz5-Q8Vkg42G5llk?usp=sharing

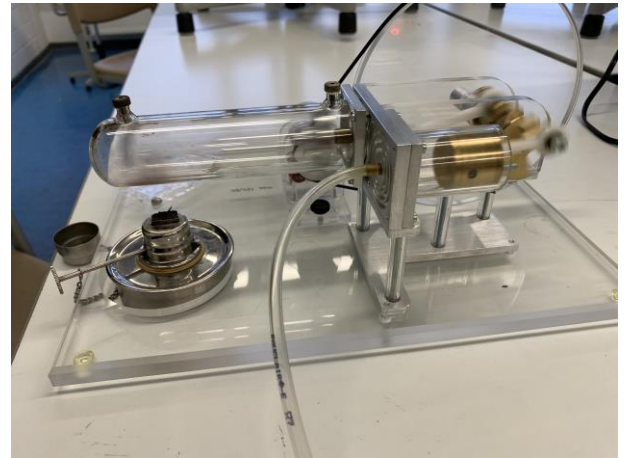
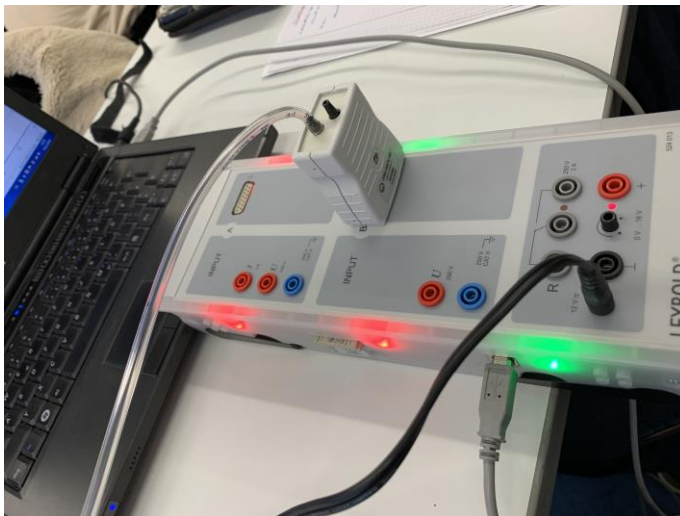
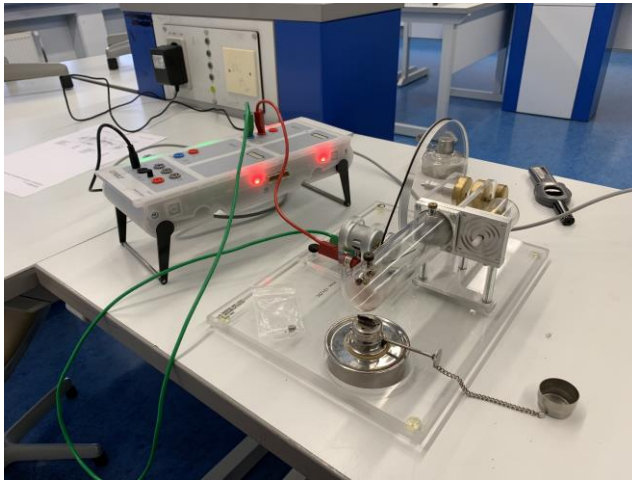
Anhang

V / cm ³	p _{B1} / hPa
123,6	-61
119,8	-30
115,6	3
111,6	37
108,3	71
105,4	104
102,9	136
101,1	164
100,5	187
100,5	206
101,1	218
102,7	223
106,0	221
110,0	211
114,0	197
118,5	179
122,9	158
126,0	133
130,5	107
135,8	80
139,6	51
143,6	23
147,8	-2
151,6	-27
154,9	-50
158,1	-73
160,5	-92
162,1	-110
163,8	-127
165,4	-142
166,1	-156
166,9	-168
166,9	-178
166,7	-187
166,3	-194
164,5	-200
162,9	-203
161,4	-204
158,9	-203
156,5	-198
153,4	-191
150,1	-182
146,0	-170
142,0	-155
138,0	-136

gute Werte

108,9	73
106,0	107
103,6	139
102,0	167
100,5	190
100,3	208
101,1	221
102,7	224
106,0	220
110,0	209
114,3	194
118,9	175
123,6	152
127,6	127
130,7	100
135,8	72
140,5	44
144,5	16
148,5	-10
152,5	-34
155,6	-58
158,1	-79
160,7	-98
162,9	-116
164,5	-132
165,2	-147
166,1	-160
166,9	-172
166,9	-182
166,1	-190
165,4	-197
164,5	-201
162,7	-204
160,5	-203
158,3	-200
154,9	-195
151,8	-187
148,5	-177
144,5	-163
140,5	-146

Wertetabellen an denen wir uns orientiert haben



Bilder zum Stirlingmotor und dem Cassy Lab von Leybold

Link zum Video des Stirlingmotor (dieses haben wir auch benutzt um die Leistung zu berechnen):

<https://drive.google.com/file/d/1SCIVIMeoZeQIPWRS-g5KVAWzNihz8Rzx/view?usp=sharing>

Abbildungsverzeichnis

<u>Abb. 0.1:</u> Unser Versuch die tatsächliche Arbeit in eine Ellipse zu transformieren.....	2
<u>Abb. 1.1:</u> Systeme der Thermodynamik	4
<u>Abb.1.2:</u> Arbeit entlang ein und derselben Zustandsänderung	5
<u>Abb.1.3:</u> Arbeit entlang verschiedene Zustandsänderung.....	6
<u>Abb. 2.1:</u> Aufbauskizze	7
<u>Abb. 2.2.:</u> Stirlingmotor des MCGs	8
<u>Abb. 2.3:</u> idealer Stirling-Prozess im p-v Diagramm & T-s Diagramm	9
<u>Abb. 3.1:</u> Der Versuchsaufbau mithilfe einer Angelschnur zur Messung.....	11
<u>Abb. 3.2:</u> Die verrichtete Arbeit des Stirlingmotors, gezeichnet durch CASSY Lab.....	12
<u>Abb. 4.1:</u> Darstellung der verrichteten Arbeit durch die Grapen $f(x)$ & $g(x)$	13
<u>Abb. 4.2:</u> Transformation der „Banane“	13
<u>Abb. 4.3:</u> Darstellung von $f(x)$ & $g(x)$ (Markiert in den jeweiligen Farben)	15

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichern wir, dass wir die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe und keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die in dem Literaturverzeichnis und/oder in der Fußnote verwendet haben. Alle Stellen der Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, haben wir in jedem Fall unter Angabe der Quelle deutlich als Entlehnung kenntlich gemacht. Dasselbe gilt für Zeichnungen, Fotos und Grafiken.

Elias Harb

Böhen, 15.06.2020

Ort, Datum

E. Harb

Unterschrift

Robin Kappes

Böhen, 15.06.2020

Ort, Datum

Robin Kappes

Unterschrift